ID 01

# Krivulja pogreškov in ploskev pogreškov oz. pedala pogreškov in pedaloid pogreškov

JANEZ ROŠER, DOC.DR. MILIVOJ VULIĆ

*Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta, Aškerčeva 12, LJUBLJANA*
janez.roser@ntf.uni-lj.si, milivoj.vulic@ntf.uni-lj.si

## POVZETEK

Natančnost položaja točke v tri razsežnem prostoru je določena s ploskvijo pogreškov ali pedaloidom pogreškov, v ravnini pa s krivuljo pogreškov ali pedalo pogreškov. Pedalo pogreškov in pedaloid pogreškov definirajo velikosti glavnih srednjih pogreškov ter njihova usmerjenost. Vrednosti glavnih srednjih pogreškov določimo s pomočjo lastnih vrednosti matrike kovarianc. Z znanimi vrednostmi glavnih pogreškov in z znanimi komponentami glavnih pogreškov v pravokotnem koordinatnem sistemu pa lahko enoznačno določimo pedaloid pogreškov in pedalo pogreškov. Krivuljo pogreškov in ploskev pogreškov lahko aproksimiramo z elipso pogreškov, odnosno z elipsoidom pogreškov. Velja poudariti, da elipsa pogreškov, oziroma elipsoid pogreškov, pravilno prikazujeta samo velikosti in smeri glavnih pogreškov.

**Ključne besede:** srednji pogrešek, pedala pogreškov, pedaloid pogreškov

## Confidence curve and confidence surface i.e. confidence pedal and confidence pedaloid

## ABSTRACT

The point position accuracy in three-dimensional space is defined by the confidence error surface, also termed the confidence error pedaloid. The accuracy of point position in 2D is defined by a confidence error curve, i.e. confidence error pedal. The confidence error curve and confidence error surface are defined by the size of the characteristic mean errors and their directionality. Covariance matrix elements define the accuracy of point position in a coordinate axis direction and are also the basis to calculate the elements of confidence error pedals and confidence error pedaloids. The confidence error pedal and confidence error pedaloid can be approximated by the error ellipse and error ellipsoid, respectively. We have to be aware that the error ellipse and the error ellipsoid correctly represent only size and direction of the main (characteristic) errors.

**Key words:** standard error, confidence pedal, confidence pedaloid

## UVOD

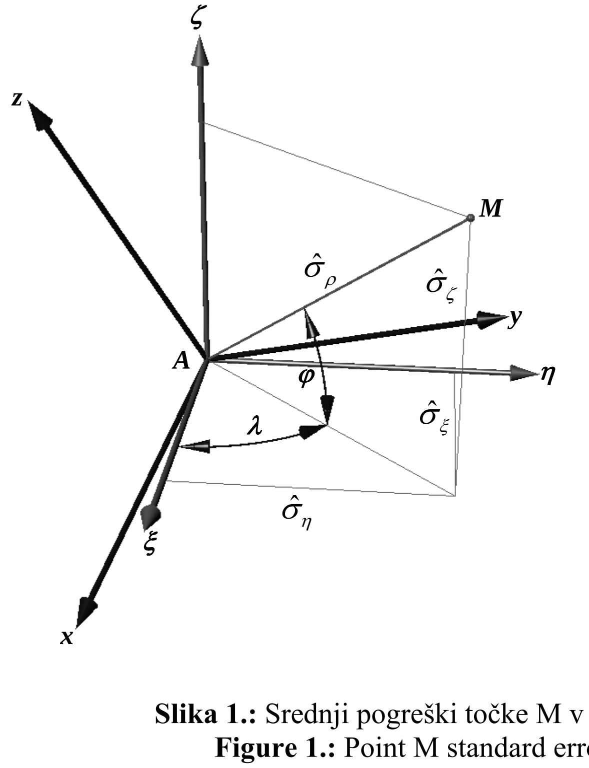
Natančnost položaja točke v tri razsežnem prostoru je določena s ploskvijo pogreškov ali pedaloidom pogreškov. Pedaloid pogreškov sodi v družino nožiščnih (pedalnih) ploskev elipsoida, katerega center sovpada s centrom elipsoida. Natančnost položaja točke v ravnini pa je določena s krivuljo srednjih pogreškov ali pedalo pogreškov, ki sodi v družino nožiščnih (pedalnih) krivulj elipse, katere center sovpada s centrom elipse. Oceno natančnosti iskanih veličin pridobimo s pomočjo elementov kovariančne matrike, ki definirajo natančnost položaja točk v smeri koordinatnih osi in so osnova za izračun elementov krivulj pogreškov – pedal pogreškov ali ploskev pogreškov – pedaloidov pogreškov.

Pedalo pogreškov in pedaloid pogreškov definirajo velikosti glavnih srednjih pogreškov ter njihova usmerjenost (vektorji glavnih srednjih pogreškov so med seboj ortogonalni in tako tudi medsebojno neodvisni). Krivuljo pogreškov in ploskev pogreškov lahko aproksimiramo z elipso pogreškov, odnosno z elipsoidom pogreškov. Pri tem velja, da elipsa pogreškov, oziroma elipsoid pogreškov, pravilno prikazujeta samo velikosti in smeri glavnih pogreškov. V vseh ostalih smereh pa so velikosti srednjih pogreškov le aproksimacija. Natančnost aproksimacije pa je odvisna od razmerij med velikostmi posameznih glavnih srednjih pogreškov [1]. Bolj kot se razmerje razlikuje od 1, manj natančna je aproksimacija.

## PLOSKEV POGREŠKOV OZ. PEDALOID POGREŠKOV

Pri izravnavi točke po načinu posrednih meritev pridobimo srednje pogreške $\hat{\sigma}_{\hat{x}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{y}}$ in $\hat{\sigma}_{\hat{z}}$ v smereh osi $x$, $y$ in $z$. Kot takšni pa srednji pogreški ne podajajo celotne informacije o natančnosti položaja točke. Natančnost položaja merjene točke v tridimenzionalnem prostoru je določena s ploskvijo pogreškov, oziroma s pedaloidom pogreškov. Za določitev pedaloida pogreškov moramo poznati glavne pogreške $\hat{\sigma}_{\xi}$, $\hat{\sigma}_{\eta}$ in $\hat{\sigma}_{\zeta}$ ter njihovo usmerjenost.

Točka $M$ ima v prostoru koordinate $\hat{x}_M$, $\hat{y}_M$ in $\hat{z}_M$ s srednjimi pogreški $\hat{\sigma}_{\hat{x}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{y}}$ in $\hat{\sigma}_{\hat{z}}$. Naj bo točka $A$ "ista" točka s hipotetično absolutnimi koordinatami $x_A$, $y_A$ in $z_A$, torej brez pogreškov. Srednji pogrešek položaja točke $M$ v smeri točke $A$ bo enak srednjemu pogrešku razdalje $\hat{\sigma}_{\rho}$ (Slika 1).




**Slika 1.:** Srednji pogreški točke M v prostorskem koordinatnem sistemu
**Figure 1.:** Point M standard errors in three-dimensional space

Razdaljo $\rho$ med točkama $M\left(\hat{y}_M, \hat{x}_M, \hat{z}_M\right)$ in $A\left(y_A, x_A, z_A\right)$ v prostoru izračunamo po enačbi:

$$\rho = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2 + \Delta z^2} = \sqrt{\left(-\hat{y}_M + y_A\right)^2 + \left(-\hat{x}_M + x_A\right)^2 + \left(-\hat{z}_M + z_A\right)^2} \tag{1}$$

Ob upoštevanju zakona o prenosu varianc in kovarianc zapišemo oceno srednjega pogreška razdalje, ki je funkcija neznanih veličin $x$, $y$ in $z$:

$$\hat{\sigma}_\rho^2 = \mathbf{J}_\rho \, \mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} \, \mathbf{J}_\rho^T \tag{2}$$

kjer je: $\hat{\sigma}_\rho$ … ocena srednjega pogreška razdalje,

$\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$ … kovariančna matrika koordinat točke $M$,

$\mathbf{J}_\rho$ … vektor odvodov funkcije $\rho$.

Velja:

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \, \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{y}} & Q_{\hat{x}\hat{z}} \\ Q_{\hat{x}\hat{y}} & Q_{\hat{y}\hat{y}} & Q_{\hat{y}\hat{z}} \\ Q_{\hat{x}\hat{z}} & Q_{\hat{y}\hat{z}} & Q_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \hat{\sigma}_{\hat{z}}^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

kjer je: $\hat{\sigma}_0^2$ … srednji pogrešek enote uteži,

$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ … variančno-kovariančna matrika neznank,

$\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2, \hat{\sigma}_{\hat{y}}^2$ in $\hat{\sigma}_{\hat{z}}^2$ …srednji kvadratni pogrešek položaja točke v smeri koordinatnih osi.

Vektor odvodov $\mathbf{J}_\rho$ je enak:

$$\mathbf{J}_\rho = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial y_M} & \dfrac{\partial \rho}{\partial x_M} & \dfrac{\partial \rho}{\partial z_M} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Členi vektorja odvodov so parcialni odvodi funkcije $\rho$ po neznankah. Torej so parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial y_M} &= -\frac{-\hat{y}_M + y_A}{\rho} = -\frac{\Delta \hat{y}_{M,A}}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_M} &= -\frac{-\hat{x}_M + x_A}{\rho} = -\frac{\Delta \hat{x}_{M,A}}{\rho} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z_M} &= -\frac{-\hat{z}_M + z_A}{\rho} = -\frac{\Delta \hat{z}_{M,A}}{\rho} \end{aligned} \tag{5}$$

Velja pa tudi:

$$\begin{aligned} \frac{-\hat{y}_M + y_A}{\rho} &= \frac{\hat{\sigma}_{\hat{y}}}{\hat{\sigma}_\rho} \\ \frac{-\hat{x}_M + x_A}{\rho} &= \frac{\hat{\sigma}_{\hat{x}}}{\hat{\sigma}_\rho} \end{aligned}$$

$$\frac{-\hat{z}_M + z_A}{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{z}}}{\hat{\sigma}_\rho} \tag{6}$$

Ko enačbi (3) in (5) vstavimo v enačbo (2) in upoštevamo (6), dobimo

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}} & \hat{\sigma}_{\hat{y}} & \hat{\sigma}_{\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{y}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{z}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Srednje pogreške v smeri koordinatnih osi pa lahko zapišemo tudi kot:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{y}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x\xi} & r_{x\eta} & r_{x\zeta} \\ r_{y\xi} & r_{y\eta} & r_{y\zeta} \\ r_{z\xi} & r_{z\eta} & r_{z\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \\ \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} \tag{8}$$

kjer matrika **R** predstavlja rotacijsko matriko

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{x\xi} & r_{x\eta} & r_{x\zeta} \\ r_{y\xi} & r_{y\eta} & r_{y\zeta} \\ r_{z\xi} & r_{z\eta} & r_{z\zeta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

za katero velja ortogonalnost; $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ in $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, njena determinanta pa je enaka $\det \mathbf{R} = 1$.

Če upoštevamo enačbo (8) v enačbi (7), sledi:

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi & \hat{\sigma}_\eta & \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x\xi} & r_{y\xi} & r_{z\xi} \\ r_{x\eta} & r_{y\eta} & r_{z\eta} \\ r_{x\zeta} & r_{y\zeta} & r_{z\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x\xi} & r_{x\eta} & r_{x\zeta} \\ r_{y\xi} & r_{y\eta} & r_{y\zeta} \\ r_{z\xi} & r_{z\eta} & r_{z\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \\ \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} \tag{10}$$

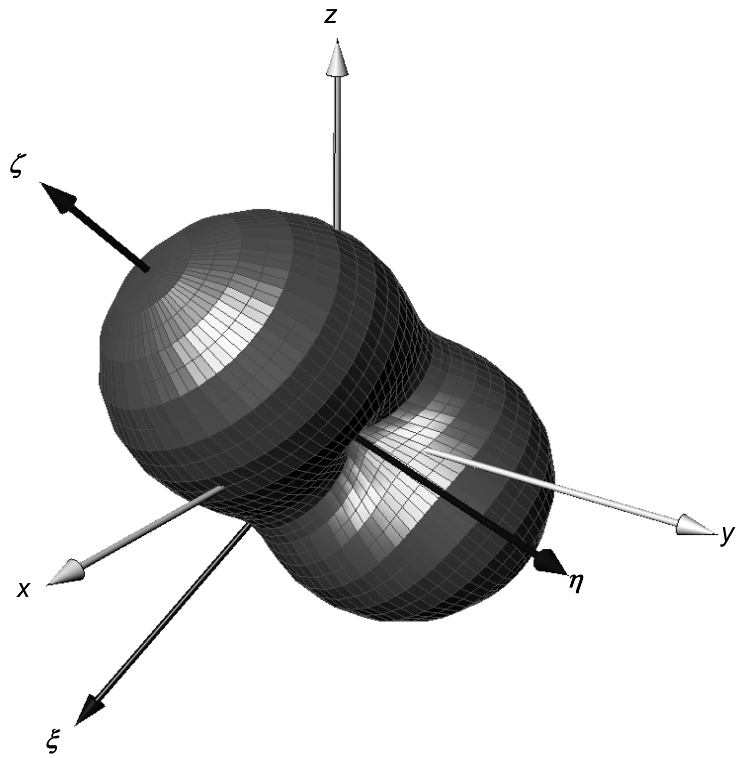
Zaradi ortogonalnosti lahko enačbo (10) poenostavimo

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi & \hat{\sigma}_\eta & \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & & \\ & \Sigma_{\eta\eta} & \\ & & \Sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \\ \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\xi^2 \Sigma_{\xi\xi} + \hat{\sigma}_\eta^2 \Sigma_{\eta\eta} + \hat{\sigma}_\zeta^2 \Sigma_{\zeta\zeta} \tag{11}$$

Ta enačba predstavlja ploskev srednjih pogreškov (Slika 2), ki jo lahko aproksimiramo z elipsoidom:

$$\frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{\Sigma_{\xi\xi}} + \frac{\hat{\sigma}_\eta^2}{\Sigma_{\eta\eta}} + \frac{\hat{\sigma}_\zeta^2}{\Sigma_{\zeta\zeta}} = 1 \tag{12}$$

kjer $\Sigma_{\xi\xi}$, $\Sigma_{\eta\eta}$ in $\Sigma_{\zeta\zeta}$ odgovarjajo kvadratom glavnih polosi (*major*, *binor*, *minor*) elipsoida.




**Slika 2.:** Pedaloid pogreškov oz. ploskev pogreškov
**Figure 2.:** Error pedaloid or error surface

Enačbo (11) se lahko z upoštevanjem spodnjega pogoja, ki je razviden iz slike 1,

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \\ \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\rho \begin{bmatrix} \cos\lambda\cos\varphi \\ \sin\lambda\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{13}$$

zapiše tudi kot

$$\hat{\sigma}_\rho^2 = \Sigma_{\xi\xi}\cos^2\lambda\,\cos^2\varphi + \Sigma_{\eta\eta}\sin^2\lambda\,\cos^2\varphi + \Sigma_{\zeta\zeta}\sin^2\varphi \tag{14}$$

## Elementi ploskve pogreškov oz. pedaloida pogreškov

Za določitev pedaloida pogreškov moramo poznati velikosti glavnih $\hat{\sigma}_\xi$ (*major*), $\hat{\sigma}_\eta$ (*binor*), $\hat{\sigma}_\zeta$ (*minor*) polosi pedaloida ter njihove usmerjenosti. Iz ocene natančnosti točke je znan položaj točke in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$ oz. variančno-kovariančna matrika neznank $\hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ [1]. Tako je tudi za vsak prostorski položaj znana matrika kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{y}} & Q_{\hat{x}\hat{z}} \\ Q_{\hat{x}\hat{y}} & Q_{\hat{y}\hat{y}} & Q_{\hat{y}\hat{z}} \\ Q_{\hat{x}\hat{z}} & Q_{\hat{y}\hat{z}} & Q_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \hat{\sigma}_{\hat{y}}^2 & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \hat{\sigma}_{\hat{z}}^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Povezava med srednjimi pogreški $\hat{\sigma}_{\hat{x}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{y}}$ in $\hat{\sigma}_{\hat{z}}$ (odseki na oseh prostorskega koordinatnega sistema) in glavnimi srednjimi pogreški $\hat{\sigma}_{\xi}$, $\hat{\sigma}_{\eta}$ in $\hat{\sigma}_{\zeta}$ se izrazi s problemom lastnih vrednosti $\lambda_i$ in lastnimi vektorji $\mathbf{s}_i$ matrike kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$.

Tako vrednosti glavnih srednjih pogreškov v prostoru določimo s pomočjo lastnih vrednosti $\lambda_i$ matrike kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}\ \mathbf{s}_i = \lambda_i\ \mathbf{s}_i \tag{16}$$

Izraz (16) lahko zapišemo kot:

$$\left(\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda\,\mathbf{I}\right)\mathbf{s}_i = 0 \tag{17}$$

Izraz (17) predstavlja sistem homogenih linearnih enačb, ki imajo ne-trivialno rešitev $\mathbf{s}_i \neq 0$, ko velja $\det\left(\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = 0$ [2].

$$\det\left(\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} - \lambda & \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{y}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} - \lambda & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} \\ \Sigma_{\hat{x}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} & \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

Iz dobljene determinante karakteristične matrike (18), se nato izpelje karakteristični polinom (v tem primeru gre za polinom tretje stopnje):

$$-c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \tag{19}$$

kjer so koeficienti:

$$\begin{aligned} c_3 &= 1 \\ c_2 &= \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} + \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} + \Sigma_{\hat{z}\hat{z}} \\ c_1 &= -3\left(\Sigma_{\hat{x}\hat{y}} + \Sigma_{\hat{y}\hat{z}} + \Sigma_{\hat{x}\hat{z}}\right) \\ c_0 &= \det \mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} \end{aligned} \tag{20}$$

Koreni karakterističnega polinoma so lastne vrednosti matrike kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$. Ko so določene lastne vrednosti $\lambda_i$, se določijo še lastni vektorji $\mathbf{s}_i$, tako da se vsaka lastna vrednost $\lambda_i$ vstavi v izraz (17).

Iz tako določenih lastnih vrednosti $\lambda_i$ se nato določijo vrednosti glavnih pogreškov:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\xi} &= \sqrt{\lambda_1} \\ \hat{\sigma}_{\eta} &= \sqrt{\lambda_2} \\ \hat{\sigma}_{\zeta} &= \sqrt{\lambda_3} \end{aligned} \tag{21}$$

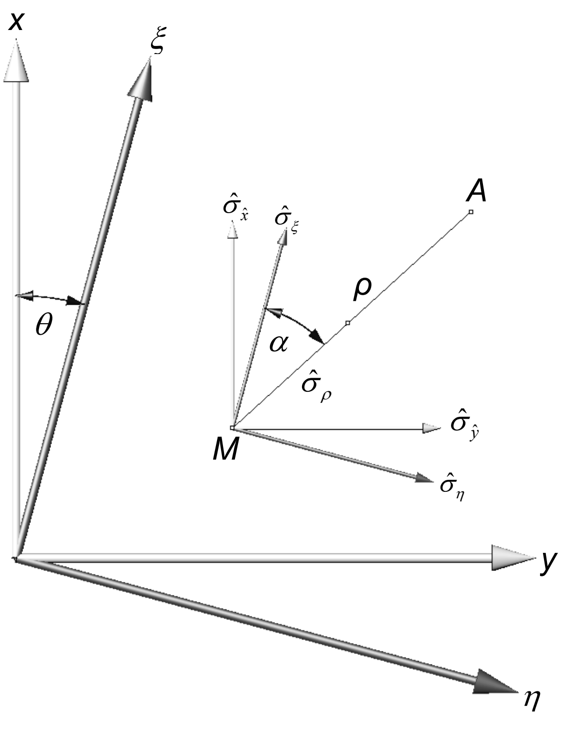
Lastni vektorji $\mathbf{s}_i$ kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$ so med seboj pravokotni (skalarni produkt dveh lastnih vektorjev je enak nič $\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{s}_j = 0$) in jih normiramo glede na dolžino. Zato se ob množenju vrednosti glavnih pogreškov z lastnimi vektorji dobijo komponente glavnih pogreškov v prostorskem koordinatnem sistemu *x*, *y*, *z*:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{s}_\xi^T &= \begin{vmatrix} s_{\xi x} & s_{\xi y} & s_{\xi z} \end{vmatrix} \\
\hat{\sigma}_\eta \cdot \mathbf{s}_\eta^T &= \begin{vmatrix} s_{\eta x} & s_{\eta y} & s_{\eta z} \end{vmatrix} \\
\hat{\sigma}_\zeta \cdot \mathbf{s}_\zeta^T &= \begin{vmatrix} s_{\zeta x} & s_{\zeta y} & s_{\zeta z} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

Z določenimi vrednostmi glavnih pogreškov in z določenimi komponentami glavnih pogreškov v trirazsežnem pravokotnem koordinatnem prostoru (*x*, *y*, *z*) je določen pedaloid pogreškov.

## KRIVULJA POGREŠKOV OZ. PEDALA POGREŠKOV

Natančnost položaja v dvodimenzionalnem prostoru je dana s krivuljo pogreškov, oziroma s pedalo pogreškov. Predvsem pa nas zanimata velikosti srednjih pogreškov v smeri glavnih srednjih pogreškov (največjega $\hat{\sigma}_\xi$ in najmanšega $\hat{\sigma}_\eta$). Z določitvijo velikosti glavnih srednjih pogreškov in njihovo usmerjenostjo enoznačno definiramo krivuljo pogreškov, oziroma pedalo pogreškov.




**Slika 3.:** Srednji pogreški točke M v ravninskem koordinatnem sistemu
**Figure 3.:** Point M standard errors in two-dimensional space

Na sliki 3 točka *M* predstavlja rezultat izravnave in ima koordinati $\hat{x}_M$ in $\hat{y}_M$ s srednjima pogreškoma $\hat{\sigma}_{\hat{x}}$ in $\hat{\sigma}_{\hat{y}}$. Naj bo točka *A* hipotetično "ista" točka z absolutnimi koordinatami $x_A$ in $y_A$ (absolutno natančna točka – torej brez pogreška). Srednji pogrešek položaja točke *M* v smeri *A* bo enak srednjemu pogrešku razdalje $\hat{\sigma}_\rho$.

Postopek izpeljave enačbe pedale pogreškov je analogen izpeljavi pedaloida pogreškov. Tako ima enačba pedale pogreškov, analogno enačbi (7), naslednjo obliko:

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi & \hat{\sigma}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & \\ & \Sigma_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\xi^2 \Sigma_{\xi\xi} + \hat{\sigma}_\eta^2 \Sigma_{\eta\eta} \tag{23}$$

Ta enačba predstavlja krivuljo srednjih pogreškov, ki je prikazana na sliki 4. Slednjo enačbo lahko z upoštevanjem spodnjega pogoja, ki je razviden iz slike 3,

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{x}} \\ \hat{\sigma}_{\hat{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\rho \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{24}$$

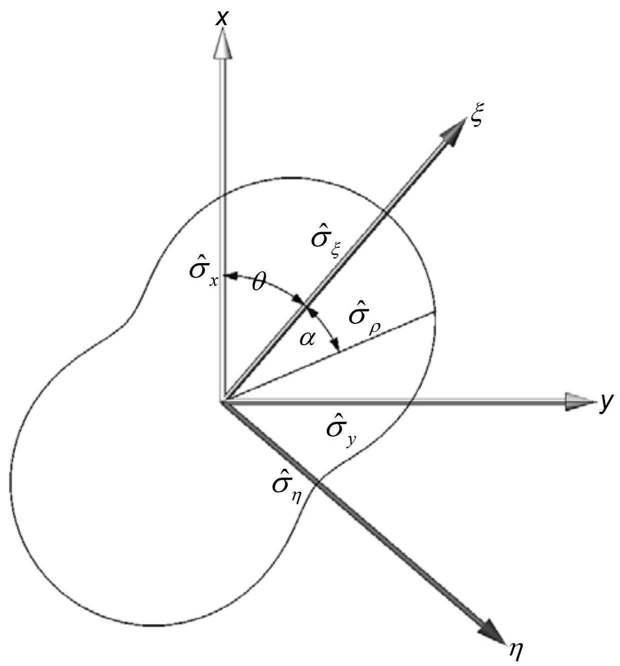
zapišemo kot enačbo srednjega pogreška položaja točke v poljubni smeri $\alpha$ (Slika 4):

$$\hat{\sigma}_\rho^2 = \Sigma_{\xi\xi} \cos^2\alpha + \Sigma_{\eta\eta} \sin^2\alpha \tag{25}$$

Enačba (23) predstavlja enačbo nožiščne krivulje elipse pogreškov s centrom v centru elipse pogreškov, katere glavne osi so identične glavnim osem elipse [3]:

$$\frac{\hat{\sigma}_\xi^2}{\Sigma_{\xi\xi}} + \frac{\hat{\sigma}_\eta^2}{\Sigma_{\eta\eta}} = 1 \tag{26}$$

kjer $\Sigma_{\xi\xi}$ in $\Sigma_{\eta\eta}$ odgovarjata kvadratom velike in male polosi elipse.




**Slika 4.:** Pedala pogreškov oz. krivulja pogreškov
**Figure 4.:** Error pedal or error curve

Najverjetnejši položaj točke v ravnini se torej nahaja znotraj krivulje srednjih pogreškov, oziroma pedale pogreškov.

## Elementi krivulje pogreškov oz. pedale pogreškov

S posredno izravnavo položaja neke točke v ravnini pridobimo, poleg najverjetnejših vrednosti koordinat, tudi pripadajočo matriko kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$. Postopek določitve elementov pedale pogreškov je enak določitvi elementov pedaloida pogreškov. Tako sta rešitvi karakterističnega polinoma druge stopnje naslednje oblike:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left( \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} + \Sigma_{\hat{y}\hat{y}} \pm \sqrt{\left(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} - \Sigma_{\hat{y}\hat{y}}\right)^2 + 4\Sigma_{\hat{x}\hat{y}}^2} \right) \tag{27}$$

Velja:

$$\hat{\sigma}_\xi = \sqrt{\Sigma_{\xi\xi}} = \sqrt{\lambda_1}$$
$$\hat{\sigma}_\eta = \sqrt{\Sigma_{\eta\eta}} = \sqrt{\lambda_2} \tag{28}$$

Produkt vrednosti glavnih pogreškov $\hat{\sigma}_\xi$, $\hat{\sigma}_\eta$ in lastnih vektorjev $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ nam da komponente glavnih pogreškov v *x*, *y* koordinatnem sistemu.

$$\hat{\sigma}_\xi \cdot \mathbf{s}_1^T = \begin{vmatrix} s_{\xi x} & s_{\xi y} \end{vmatrix}$$
$$\hat{\sigma}_\eta \cdot \mathbf{s}_2^T = \begin{vmatrix} s_{\eta x} & s_{\eta y} \end{vmatrix} \tag{29}$$

Na ta način je določena krivulja pogreškov, oziroma pedala.

## ZAKLJUČEK

V inženirski praksi je nemogoče podati absolutno natančen položaj točke. Pomembno je, da poleg koordinat izmerjene točke, podajamo tudi natančnost položaja točke. Zaradi pogreškov v poljubni smeri prostora najverjetnejši položaj točke variira:

- v ravnini znotraj pedale pogreškov oz. krivulje pogreškov, katere enačba ima naslednjo obliko

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi & \hat{\sigma}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & \\ & \Sigma_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\xi^2 \Sigma_{\xi\xi} + \hat{\sigma}_\eta^2 \Sigma_{\eta\eta}$$

- v *3D* prostoru znotraj pedaloida pogreškov oz. ploskve pogreškov, katerega enačba ima naslednjo obliko

$$\hat{\sigma}_\rho^4 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi & \hat{\sigma}_\eta & \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & & \\ & \Sigma_{\eta\eta} & \\ & & \Sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\xi \\ \hat{\sigma}_\eta \\ \hat{\sigma}_\zeta \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_\xi^2 \Sigma_{\xi\xi} + \hat{\sigma}_\eta^2 \Sigma_{\eta\eta} + \hat{\sigma}_\zeta^2 \Sigma_{\zeta\zeta}$$

Relacija med srednjimi pogreški $\hat{\sigma}_{\hat{x}_1}$, $\hat{\sigma}_{\hat{x}_2}$ … $\hat{\sigma}_{\hat{x}_n}$ in glavnimi srednjimi pogreški $\hat{\sigma}_{\xi_1}$, $\hat{\sigma}_{\xi_2}$ … $\hat{\sigma}_{\xi_n}$ se izrazi s problemom lastnih vrednosti $\lambda_i$ in lastnimi vektorji $\mathbf{s}_i$ matrike kovarianc $\mathbf{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}}$. Ker so lastne (karakteristične) vrednosti neodvisne od koordinatnega sistema, sta tudi pedala pogreškov in pedaloid pogreškov invariantna na spremembo koordinatnega sistema.

## VIRI

[1] Uranjek, Gregor. Priloga k spremljanju objektov s simultanimi meritvami različnih tipov. Diplomsko delo. Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta, Oddelek za geotehnologijo in rudarstvo, Ljubljana 2007.

[2] Feil, Ladislav. Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, prvi del. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1989.

[3] Čubranić, Nikola. Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Sveučilište u Zagrebu, Tehnička knjiga Zagreb, Zagreb 1967.